

Lectura 1. La Programación Lineal

Docente: JUAN CARLOS VERGARA SCHMALBACH

Fuente: <http://www.optimos.usach.cl/PM.htm> (Servicio de Optimización ON – LINE)

PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

La programación matemática es un área de la matemática que se preocupa, con la generación de modelos matemáticos, de representar situaciones reales en las cuales se tiene como preocupación principal la optimización de un recurso escaso.

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{s.a. } x \in \Omega \end{array}$$

Un problema de programación matemática es pedir un formato general de la siguiente forma:

$f(x)$: es una función matemática que representa el costo a minimizar, equivalentemente el problema, puede ser escrito en el formato de maximización caso en el cual $f(x)$ representa la ganancia a maximizar.

W : representa el espacio que contiene a todas las soluciones posibles (factibles) para el problema que se resuelve.

x : en general, puede ser representado por un vector de variables de n componentes. El formato establece la minimización de una función en un espacio delimitado y conocido de antemano.

En el formato general antes descrito, cuando $f(x)$ es una función lineal de la forma:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

y las restricciones del problema o el espacio W también se puede representar como un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m & \\ & & & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

Entonces el problema se conoce como un **Problema de Programación Lineal**. Note que la función a optimizar es un expresión lineal en la variable x_1, x_2, \dots, x_n , cada variable está multiplicada por un número que corresponde a un dato del problema c_1, c_2, \dots, c_n . Lo mismo ocurre con las restricciones cada igualdad es una expresión lineal, en las variables del problema. Se tienen m variables y n restricciones. Una condición adicional, es incorporada en el problema de programación lineal, las variables son obligadas a pertenecer al cuadrante no negativo del espacio unidimensional de búsqueda. Una solución óptima para este problema es encontrada al determinar los valores de las variables x_1, x_2, \dots, x_n en el espacio no negativo que proporcionan el mejor valor para la función $f(x)$ y que cumplen con todas las condiciones representadas en este caso como restricciones del problema.

PROGRAMACIÓN ENTERA

La Programación Entera surge por considerar el mismo formato descrito para la programación lineal pero considerando que las variables del problema se restringuen a asumir exclusivamente números enteros, o sea, en el problema de programación entera se trata de optimizar una función lineal cuyas variables deben tener números enteros sujetos a un espacio de búsqueda W determinada por igualdades que también contienen en sus variables números enteros.

PROGRAMACIÓN NO LINEAL

En la Programación No Lineal la función a optimizar es, en general, una función matemática no lineal. Se pueden dar los siguientes casos:

- La función a optimizar es no lineal y las restricciones son lineales obedeciendo el formato antes descrito.
- Las restricciones son un conjunto de igualdades no lineales y la función objetivo es lineal.

Por una función no lineal de manera muy simple se entiende una función que tiene en sus expresiones matemáticas no lineales (cuadráticas, polinomiales, exponenciales, etc.) de al menos una de las variables involucradas en la expresión. Un ejemplo de una expresión no lineal es el siguiente:

$$x_1^2 \log x_2 + \sin^2 x_2 + x_3^3 + x_4 = 5$$

Un caso particular de la programación lineal se obtiene cuando las variables corresponden a flujos o costos definidos sobre un grafo. Ésta área recibe el nombre de Flujos en Redes. La problemática es optimizar elementos del grafo, tales como, el flujo que atraviesa un grafo o el flujo de costo mínimo que atraviesa un grafo, o bien la determinación de caminos mínimos o circuitos con determinadas características sobre el grafo.

A pesar de ser ésta un área que es un subconjunto de la programación lineal sus aplicaciones son tan variadas que es considerada muchas veces como un área independiente, existen muchos libros orientados exclusivamente al tema de flujos en redes.

APLICACIONES

Los métodos provenientes de la programación matemática pueden ser utilizados para resolver problemas de la siguiente naturaleza, las aplicaciones cubren todas las áreas de la ingeniería, por mencionar algunas se tiene la planificación, programación y control de la producción; almacenamiento óptimo de materias primas; determinación de los mejores métodos de producción; minimización de pérdidas o residuos en el tratamiento de la materia prima en los procesos de fabricación. En el área de los servicios, se pueden distinguir los siguientes sectores:

- [Sector de Manufactura](#)
- [Sector de Salud](#)
- [Sector Transporte](#)
- [Sector Telecomunicaciones](#)
- [Sector Energía](#)
- [Sector Educación](#)

Para entablar una situación real mediante la Programación Matemática se debe generar un modelo matemático de acuerdo al formato general antes definido para representar todos los elementos presentes en la situación real, se debe tomar, por lo tanto, mucha atención en la definición de cada una de las variables, cada restricción y en particular, en la función objetivo. Una vez establecido el modelo se puede aplicar algunos de los métodos disponibles para resolverlo, el método implementado, adecuadamente en un computador, genera el valor para cada una de las variables definidas para el problema estos valores constituyen una situación óptima. En una tercera etapa estos valores deben ser adecuadamente interpretados desde el punto de vista de la problemática real para encontrar su solución.

Sector de Manufactura

La determinación óptima de una cartera de inversiones en un ejemplo típico; planeación agrícola; asignación de los recursos nacionales.

Sector de Salud

La optimización de los turnos de trabajos de enfermeras y médicos en los hospitales; la asignación óptima de los pabellones quirúrgicos; la asignación óptima de camas en los hospitales; el ruteamiento de las ambulancias en la ciudad, etc.

Sector Transporte

La determinación de las rutas óptimas de las líneas de buces; la minimización de los tiempos de espera en las estaciones; la definición de los trazados de las líneas del metro; la asignación óptima de trenes de carga sobre la línea; la determinación de la mejor ruta con cambios de medios de transporte entre dos puntos de la región; la determinación de la ruta óptima cuando hay cambios de medios de transportes puertos, trenes y aéreos; etc.

Sector Telecomunicaciones

Optimización de la mensajería a través de plantas telefónicas; determinación de la localización óptima de antenas; ruteamiento de las llamadas entre plantas telefónicas y medios electrónicos en general; localización de concentradores en redes de computadores, ruteamientos de paquetes computacionales en la red de computadores; localización de equipos en una red de computadores tales como concentradores, switchs, hubs; etc.

Sector Energía

Distribución óptima de la energía eléctrica; localización de plantas de energía eléctrica; configuración de redes de energía eléctrica para absorber el abastecimiento de la población; trazado óptimo de las redes de gas urbano; determinación óptima de la compra de petróleo crudo para producir gasolina o bencina; etc.

Sector Educación

Asignación de los horarios a las salas de clases; asignación de cursos a las salas de clases; asignación de los profesores a los cursos de un colegio o una institución educacional.